ROK I. WARSZAWA, WRZESIEŃ 1938. ZESZYT 3.

KWARTALNIK TELEKOMUNIKACYJNY

CZASOPISMO NAUKOWE
POŚWIĘCONE SPRAWOM TELEKOMUNIKACJI
WYDAWANE PRZEZ STOWARZYSZENIE TELETECHNIKÓW POLSKICH
PRZY POPARCIU MINISTERSTWA POCZT I TELEGRAFÓW.

Adres Redakcji i Administracji: **Warszawa, Plac Napoleona 10, tel. 343-77.**

Prenumerata roczna wynosi zł 2.—

TREŚĆ Nr 2.

SOMMAIRE DU No 2.

Inż. W. ŻOCHOWSKI.

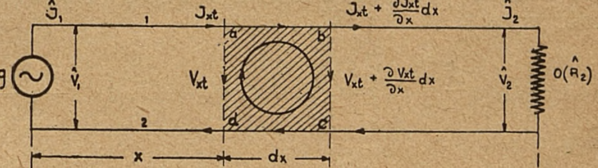
TEORIA OBWODU SPUPINIZOWANEGO.

A) **Wyprowadzenie wzoru dla tłumienia zespolonego w zależności od spółczynnika odbicia energji pomiędzy cewką pupinowską a obwodem oraz wyprowadzenie wzorów przybliżonych dla spółczynnika tłumienia i spółczynnika długości fali.**

Przed przystąpieniem do rozpatrzenia obwodu spupinizowanego rozpatrzymy równomierny niespupinizowany obwód dwuprzewodowy, przedstawiony na rys. 1. i utworzony z żył 1 i 2. Obwód ten jest zasilany przez źródło g prądu sinusoidalnie zmieninego i jest zamknięty na końcu odbiornikiem O, posiadającym opór zespolony $\hat{R}_2$.

Oznaczmy przez l długość pojedynczej żyły oraz przez V_{xt} i I_{xt} chwilowe wartości napięcia i natężenia prądu na początku elementu o długości dx, wyodrębnionego z obwodu w odległości x od źródła prądu. Ponieważ na końcu rozpatrywanego elementu chwilowe wartości napięcia i natężenia prądu wynoszą

$$V_{xt} + \frac{\partial V_{xt}}{\partial x} dx \text{ i } I_{xt} + \frac{\partial I_{xt}}{\partial x} dx,$$



RYS. 1.

to chwilowe wartości spadków napięcia i natężenia prądu wzdłuż elementu wynoszą

$$-\frac{\partial V_{xt}}{\partial x} dx \text{ i } -\frac{\partial I_{xt}}{\partial x} dx.$$

Jeżeli oznaczymy przez:

R—opór obwodu w omach na kilometr (Ω/km),

L—indukcyjność obwodu w henrach na kilometr (H/km),

A—upływność w izolacji obwodu w siemensach na kilometr (S/km),

C—pojemność obwodu w faradach na kilometr (F/km),

to w celu otrzymania pierwszego równania, odnoszącego się do spadku napięcia w rozpatrywanym elemencie, zastosujemy prawo indukcji, według którego suma okrężna napięć, otrzymana przy okrążeniu zakreskowanej powierzchni prostokąta *abcd* (rys. 1) w kierunku wskazanym na rysunku wewnątrz prostokąta, równa się zanikowi $-\frac{d\,(d\,\Phi_{xt})}{d\,t}$ strumienia magnetycznego $d\,\Phi_{xt}$, przechodzącego przez wspomnianą powierzchnię. Ponieważ strumień ten wynosi:

$$d\,\Phi_{xt} = I_{xt}\,L\,.\,d\,x$$

to zanik magnetyczny wyrazi się wzorem:

$$-\frac{d\,(d\,\Phi_{xt})}{d\,t} = -L\,.\,d\,x\,\frac{d\,I_{xt}}{d\,t}$$

Na zasadzie prawa indukcji otrzymujemy:

$$-L\,.\,d\,x\,.\,\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,t} = I_{xt}\,R\,.\,d\,x + \left(V_{xt} + \frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,x}\,dx\right) - V_{xt}$$

skąd:

$$-\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,x} = I_{xt}\,R + L\,.\,\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,t} \quad . \quad . \quad (1)$$

Drugie równanie wyniknie z prawa ciągłości prądu, bowiem różnica $-\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,x}\,dx$ pomiędzy prądem wchodzącym do elementu i prądem wychodzącym z niego idzie częściowo na ładowanie elementu prądem $C\,.\,d\,x\,.\,\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,t}$, częściowo zaś na pokrycie straty upływu, której wartość wynosi $A\,.\,d\,x\,.\,V_{xt}$, zatem:

$$I_{xt} - \left(I_{xt} + \frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,x}\,dx\right) = A\,.\,d\,x\,.\,V_{xt} + C\,.\,d\,x\,.\,\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,t}$$

skąd:

$$-\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,x} = A\,.\,V_{xt} + C\,\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,t} \quad . \quad . \quad (2)$$

Równania różniczkowe (1) i (2) umożliwiają określenie zmienności napięcia i natężenia prądu w stanie ustalonym. Zmienność ta dotyczy rozkładu napięć i prądów wzdłuż obwodu w danej chwili, jak również dotyczy zmiany napięcia i prądu w danym miejscu obwodu w funkcji czasu.

Do rozwiązania układu równań różniczkowych (1) i (2) zastosujemy metodę Helmholtz'a. Aby wyjaśnić tę metodę zauważymy, iż w wypadku zasilania obwodu ze źródła prądu sinusoidalnie zmiennego, napięcie i natężenie prądu oraz ich pochodne zmieniają się również sinusoidalnie. W równaniu (1) można zatem przyjąć:

$$-\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,x} = h_0\,Sn\,(\omega\,t + \lambda)$$

lub:

$$-\frac{\partial\,V_{xt}}{\partial\,x} = h_0\,Cs\,(\omega\,t + \lambda)$$

gdyż funkcja $Cs\,(\omega\,t + \lambda)$ różni się w fazie od funkcji $Sn\,(\omega\,t + \lambda)$ jedynie o kąt $\frac{\pi}{2}$.

Po wprowadzeniu powyższych wartości do równania (1) przyjmie ono następującą postać;:

$$I_{xt}\,R + L\,\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,t} = h_0\,Sn\,(\omega\,t + \lambda) \quad . \quad (3)$$

lub:

$$I_{xt}\,R + L\,\frac{\partial\,I_{xt}}{\partial\,t} = h_0\,Cs\,(\omega\,t + \lambda) \quad . \quad (4)$$

Oznaczmy rozwiązanie równania (3) przez I_{xt}', zaś rozwiązanie równania (4) przez I_{xt}'', a następnie wprowadźmy rozwiązanie I_{xt}' do równania (3) oraz pomnóżmy je przez $j = \sqrt{-1}$ i dodajmy do równania (4), wprowadzając uprzednio do tego ostatniego rozwiązanie I_{xt}''. Otrzymamy wówczas:

$$R\,(I_{xt}'' + j\,I_{xt}') + L\,\frac{\partial\,(I_{xt}'' + j\,I_{xt}')}{\partial\,t} = h_0\,e^{j\,(\omega t + \lambda)} \quad (5)$$

gdyż według Moivr'a jest:

$$Cs\,(\omega\,t + \lambda) + j\,Sn\,(\omega\,t + \lambda) = e^{j\,(\omega\,t\,+\,\lambda)}$$

Rozwiązanie I_{xt}'' jest pomocniczym rozwiązaniem, służącym tylko do określenia rozwiązania I_{xt}'.

Przedstawmy rozwiązanie równania (5) w następującej formie zespolonej

$$I_{xt}'' + j\,I_{xt}' = \overline{I}_x\,e^{j\,(\omega\,t\,+\,\varphi_x)} = \overline{I}_x\,[Cs\,(\omega\,t + \varphi_x) + j\,Sn\,(\omega\,t + \varphi_x)] \quad . \quad (6)$$

gdzie $\overline{I}_x$ jest amplitudą, zaś φ_x kątem fazowym natężenia prądu w danym miejscu przewodu. Ponieważ w rozwiązaniu zespolonym (6) składowe rzeczywiste i urojone, stojące po obydwóch jego stronach, winny równać się sobie, to z porównania ze sobą składowych urojonych otrzymamy równanie:

$$I_{xt}' = \overline{I}_x\,Sn\,(\omega\,t + \varphi_x) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

które jest rozwiązaniem równania (3).

W celu określenia wartości $\overline{I}_x$ i φ_x wprowadźmy rozwiązanie zespolone (6) do równania (5), otrzymamy wówczas:

$$\bar{I}_x e^{j\varphi_x}(R + j\omega L) = h_0 e^{j\lambda} \quad . \quad . \quad (8)$$

skąd:

$$\bar{I}_x e^{j\varphi_x} = \frac{h_0 e^{j\lambda}}{R + j\omega L}$$

Ponieważ z drugiej strony jest:

$$R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, \varepsilon^{j \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}}$$

zatem:

$$\bar{I}_x e^{j\varphi_x} = \frac{h_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j\left(\lambda - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right)} \quad . \quad (9)$$

Wartość amplitudy $\bar{I}_x$ i kąta fazowego φ_x wyniknie z równania (9), a mianowicie:

$$\bar{I}_x = \frac{h_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\varphi_x = \lambda - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Metodę Helmholtza można zatem sformułować w następujący sposób:

aby wyznaczyć rozwiązanie równania (3) należy zgodnie z równaniami (5) i (6) wprowadzić do niego na miejsca wartości chwilowej I_{xt} wartość zespoloną $\bar{I}_x e^{j(\omega t + \chi_x)}$, oraz na miejsce $Sn(\omega t + \lambda)$ liczbę zespoloną $\varepsilon^{j(\omega t + \lambda)}$, otrzymując w ten sposób równanie (8). Z tego ostatniego równania można już wyznaczyć amplitudę $\bar{I}_x$ i kąt fazowy φ_x, które wyrażają się wzorami (10) i (11) i które określają całkowicie rozwiązanie (7).

Podobnie, przyjmując w równaniu (2):

$$-\frac{\partial I_{xt}}{\partial x} = t_0 \,.\, Sn(\omega t + \nu)$$

będziemy mieli:

$$A V_{xt} + C \frac{\partial V_{xt}}{\partial t} = t_0 \,.\, Sn(\omega t + \nu) \quad . \quad (12)$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie równania (12) należy wprowadzić do niego na miejsce wartości chwilowej V_{xt} wartość zespoloną $\bar{V}_x\, e^{j(\omega t + \chi_x)}$ oraz na miejsce $Sn(\omega t + \nu)$ liczbę zespoloną $e^{j(\omega t + \nu)}$, otrzymując w ten sposób równanie, z którego można wyznaczyć amplitudę $\bar{V}_x$ i kąt fazowy χ_x, określające całkowicie rozwiązanie:

$$V_{xt}' = \bar{V}_x \,.\, Sn(\omega t + \chi_x) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ponieważ równania (1) i (2) stanowią układ równań różniczkowych, z których każde zawiera obydwie zmienne I_{xt} i V_{xt}, to w celu wyznaczenia ich rozwiązań wprowadzamy do każdego z nich na miejsce wartości chwilowej I_{xt} wartość zespoloną:

$$\bar{I}_x e^{j(\omega t + \varphi x)} = \hat{I}_x \sqrt{2}\, e^{j\omega t}$$

oraz na miejsce wartości chwilowej V_{xt} wartość zespoloną:

$$\bar{V}_x e^{j(\omega t + \chi_x)} = \hat{V}_x \sqrt{2}\, e^{j\omega t}$$

gdzie wartości symboliczne $\hat{I}_x$ i $\hat{V}_x$ wyrażają się wzorami:

$$\hat{I}_x = I_x\, e^{j\varphi_x}$$

$$\hat{V}_x = V_x\, e^{j\chi_x}$$

zaś I_x i V_x są wartościami skutecznemi. Otrzymamy wówczas następujące równania:

$$-\frac{d\hat{V}_x}{dx} = (R + j\omega L)\, \hat{I}_x \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$-\frac{d\hat{I}_x}{dx} = (A + j\omega C)\, \hat{V}_x \quad . \quad . \quad (15)$$

W równaniach (14) i (15) pochodne cząstkowe zastąpiono pochodnymi zupełnymi, gdyż wielkości $\hat{V}_x$ i $\hat{I}_x$ zależą tylko od zmiennej x. Aby scałkować powyższy układ równań różniczkujemy je względem zmiennej x, będzie wówczas:

$$-\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{d\hat{I}_x}{dx}$$

$$-\frac{d^2\hat{I}_x}{dx^2} = (A + j\omega C)\frac{d\hat{V}_x}{dx}$$

lub po uwzględnieniu równań (14) i (15):

$$\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\, \hat{V}_x \quad . \quad (16)$$

$$\frac{d^2\hat{I}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\, \hat{I}_x \quad . \quad . \quad (17)$$

Przedstawmy rozwiązanie równania (16) w postaci:

$$\hat{V}_x = \hat{B}\, e^{\hat{\gamma} x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

W celu określenia wartości zespolonych $\hat{B}$ i $\hat{\gamma}$ różniczkujemy dwukrotnie względem zmiennej x równanie (18), otrzymamy wówczas:

$$\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = \hat{B}\,\hat{\gamma}^2 e^{\hat{\gamma} x}$$

lub po uwzględnieniu równania (18):

$$\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = \hat{\gamma}^2\, \hat{V}_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Z podstawienia drugiej pochodnej z równania (19) do równania (16) wyniknie:

$$\hat{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} \quad . \quad . \quad (20)$$

Całka ogólna równania (16) będzie zatem następująca:

$$\hat{V}_x = \hat{B}_1\, e^{\hat{\gamma} x} + \hat{B}_2\, e^{-\hat{\gamma} x} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Z równania (14) przy uwzględnieniu zależności (20) i (21) otrzymamy:

$$\hat{I}_x = \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} \left(\hat{B}_2 e^{-\hat{\gamma} x} - \hat{B}_1 e^{\hat{\gamma} x}\right) \quad (22)$$

Zaznaczyć należy, że stałe całkowania $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ są liczbami zespolonymi, przedstawiającymi pewne wektory napięć. Wielkość $\hat{\gamma}$, która jest również liczbą zespoloną, można przedstawić w postaci składowych:

$$\hat{\gamma} = \beta + j\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Poszczególne wyrazy w równaniu (23) posiadają następujące nazwy:

$\hat{\gamma}$ — tłumienie zespolone,
β — spółczynnik tłumienia,
α — spółczynnik długości fali.

Spółczynnik w równaniu (22):

$$\sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}}$$

posiada wymiar przewodności. Odwrotność tego spółczynnika:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

posiada wymiar oporu i nazywa się oporem falowym obwodu.

Aby wyznaczyć stałe całkowania $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ zastosujemy równania (21) i (22) do końca obwodu (rys. 1), dla którego jest:

$$x = l \quad \hat{V}_x = \hat{V}_2 \quad \hat{I}_x = \hat{I}_2$$

otrzymamy wówczas:

$$\hat{V}_2 = \hat{B}_1 e^{\hat{\gamma} l} + \hat{B}_2 e^{-\hat{\gamma} l}$$

$$\hat{I}_2 \hat{Z} = \hat{B}_2 e^{-\hat{\gamma} l} - \hat{B}_1 e^{\hat{\gamma} l}$$

Rozwiązując powyższe dwa równania względem $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$, będziemy mieli:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2} (\hat{V}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{\hat{\gamma} l} \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2} (\hat{V}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}) e^{-\hat{\gamma} l} \quad . \quad . \quad (26)$$

Po wyniesieniu w równaniach (21) i (22) stałej $\hat{B}_2$ za nawias otrzymamy:

$$\hat{V}_x = \hat{B}_2 \left(e^{-\hat{\gamma} x} + \frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_2} e^{\hat{\gamma} x}\right)$$

$$\hat{I}_x = \frac{\hat{B}_2}{\hat{Z}} \left(e^{-\hat{\gamma} x} - \frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_2} e^{\hat{\gamma} x}\right)$$

lub po uwzględnieniu równań (25) i (26):

$$\hat{V}_x = \hat{B}_2 \left[e^{-\hat{\gamma} x} + \frac{\hat{V}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}}{\hat{V}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}} e^{-\hat{\gamma}(2l - x)}\right] \quad . \quad (27)$$

$$\hat{I}_x = \frac{\hat{B}_2}{\hat{Z}} \left[e^{-\hat{\gamma} x} - \frac{\hat{V}_2 - \hat{I}_2 \hat{Z}}{\hat{V}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}} e^{-\hat{\gamma}(2l - x)}\right] \quad . \quad (28)$$

Jeżeli uwzględnimy w równaniach (27) i (28) zależność:

$$\hat{V}_2 = \hat{I}_2 \hat{R}_2$$

to otrzymamy ostatecznie:

$$\hat{V}_x = \hat{B}_2 \left[e^{-\hat{\gamma} x} + \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}} e^{-\hat{\gamma}(2l - x)}\right] \quad . \quad (29)$$

$$\hat{I}_x = \frac{\hat{B}_2}{\hat{Z}} \left[e^{-\hat{\gamma} x} - \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}} e^{-\hat{\gamma}(2l - x)}\right] \quad . \quad (30)$$

Z zastosowania równań (29) i (30) do początku obwodu, dla którego jest $x = 0$, $\hat{V}_x = \hat{V}_1$ i $\hat{I}_x = \hat{I}_1$ (rys. 1), wynikną następujące równania:

$$\hat{V}_1 = \hat{B}_2 \left(1 + \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}} e^{-2\hat{\gamma} l}\right) \quad . \quad (31)$$

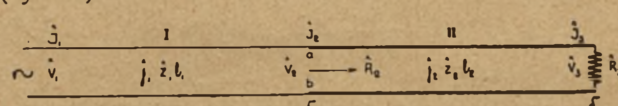
$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{B}_2}{\hat{Z}} \left(1 - \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}} e^{-2\hat{\gamma} l}\right) \quad . \quad (32)$$

z zastosowania zaś tych równań do końca obwodu, dla którego jest $x = l$, $\hat{V}_x = \hat{V}_2$ i $\hat{I}_x = \hat{I}_2$ (rys. 1), wynikną równania:

$$\hat{V}_2 = \hat{B}_2 e^{-\hat{\gamma} l} \left(1 + \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}}\right) \quad . \quad (33)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{B}_2}{\hat{Z}} e^{-\hat{\gamma} l} \left(1 - \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}}{\hat{R}_2 + \hat{Z}}\right) \quad . \quad . \quad (34)$$

Powyżej rozpatrywaliśmy obwód równomierny, który jest obwodem symetrycznym, obecnie przystąpimy do rozpatrzenia obwodu niesymetrycznego, złożonego z dwóch obwodów I i II (rys. 2).



RYS, 2.

Oznaczmy przez $\hat{\gamma}_1$, $\hat{Z}_1$ i l_1 tłumienie zespolone, opór falowy i długość obwodu I, zaś przez $\hat{\gamma}_2$, $\hat{Z}_2$ i l_2 te same dane dla obwodu II. Biorąc pod uwagę, że obwód I jest zamknięty na końcu pewnym oporem zespolonym $\hat{R}_2$ (rys. 2), mierzonym pomiędzy punktami a i b w kierunku obwodu II, zamkniętego oporem zespolonym $\hat{R}_3$, otrzymamy dla obwodu I na podstawie zależności (31), (32), (33) i (34) następujące równania:

$$\hat{V}_1 = \hat{B}' \left(1 + \frac{\hat{R}_2 - \hat{Z}_1}{\hat{R}_2 + \hat{Z}_1} e^{-2\hat{\gamma}_1 l_1}\right) \quad . \quad (35)$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{B}'}{\hat{Z}_1} \left(1 - \frac{\hat{R} - \hat{Z}_1}{\hat{R}_2 + \hat{Z}_1} e^{-2\hat{\gamma}_1 l_1}\right) \quad . \quad (36)$$

$$\hat V_2 = \hat B' e^{-\hat\gamma_1 l_1}\left(1+\frac{\hat R_2-\hat Z_1}{\hat R_2+\hat Z_1}\right) \quad . \quad . \quad (37)$$

$$\hat I_2 = \frac{\hat B'}{\hat Z_1} e^{-\hat\gamma_1 l_1}\left(1-\frac{\hat R_2-\hat Z_1}{\hat R_2+\hat Z_1}\right) \quad . \quad . \quad (38)$$

zaś dla obwodu II:

$$\hat V_2 = \hat B''\left(1+\frac{\hat R_3-\hat Z_2}{\hat R_3+\hat Z_2} e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\right) \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\hat I_2 = \frac{\hat B''}{\hat Z_2}\left(1-\frac{\hat R_3-\hat Z_2}{\hat R_3+\hat Z_2} e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\right) \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\hat V_3 = \hat B'' e^{-\hat\gamma_2 l_2}\left(1+\frac{\hat R_3-\hat Z_2}{\hat R_3+\hat Z_2}\right) \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\hat I_3 = \frac{\hat B''}{\hat Z_2} e^{-\hat\gamma_2 l_2}\left(1-\frac{\hat R_3-\hat Z_2}{\hat R_3+\hat Z_2}\right) \quad . \quad . \quad (42)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\frac{\hat R_3-\hat Z_2}{\hat R_3+\hat Z_2} = \hat\delta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

i wyznaczmy opór zespolony $\hat R_2$, posiłkując się wzorami (39) i (40). Opór ten wyrazi się następującym wzorem:

$$\hat R_2 = \frac{\hat V_2}{\hat I_2} = \hat Z_2 \frac{1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1-\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} \quad . \quad . \quad (44)$$

Jeżeli wprowadzimy wartość oporu $\hat R_2$ ze wzoru (44) do ułamka $\frac{\hat R_2-\hat Z_1}{\hat R_2+\hat Z_1}$, występującego we wzorach (35), (36), (37) i (38), to otrzymamy:

$$\frac{\hat R_2-\hat Z_1}{\hat R_2+\hat Z_1} = \frac{\hat Z_2 \dfrac{1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1-\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} - \hat Z_1}{\hat Z_2 \dfrac{1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1-\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} + \hat Z_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{\hat Z_2-\hat Z_1}{\hat Z_2+\hat Z_1} + \hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\dfrac{\hat Z_2-\hat Z_1}{\hat Z_2+\hat Z_1}\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}$$

lub po wprowadzeniu oznaczenia:

$$\frac{\hat Z_2-\hat Z_1}{\hat Z_2+\hat Z_1} = \hat\delta_2$$

będziemy mieli:

$$\frac{\hat R_2-\hat Z_1}{\hat R_2+\hat Z_1} = \frac{\hat\delta_2+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} \quad . \quad . \quad (45)$$

Uwzględniając zależność (45) we wzorach (35), (36), (37) i (38), otrzymamy:

$$\hat V_1 = \hat B'\left(1+\frac{\hat\delta_2+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} e^{-2\hat\gamma_1 l_1}\right) =$$

$$= \frac{\hat B'}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}\Big(1+\hat\delta_1 e^{-2(\hat\gamma_1 l_1+\hat\gamma_2 l_2)} +$$

$$+ \hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_1 l_1} + \hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\Big) \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$\hat I_1 = \frac{\hat B'}{\hat Z_1}\left(1-\frac{\hat\delta_2+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}} e^{-2\hat\gamma_1 l_1}\right) =$$

$$= \frac{\hat B'}{\hat Z_1(1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2})}\Big(1-\hat\delta_1 e^{-2(\hat\gamma_1 l_1+\hat\gamma_2 l_2)} -$$

$$-\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_1 l_1} + \hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\Big) \quad . \quad . \quad (47)$$

$$\hat V_2 = \hat B' e^{-\hat\gamma_1 l_1}\left(1+\frac{\hat\delta_2+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}\right) =$$

$$= \frac{\hat B' e^{-\hat\gamma_1 l_1}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}\Big(1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2} +$$

$$+\hat\delta_2 + \hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\Big) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\hat I_2 = \frac{\hat B'}{\hat Z_1} e^{-\hat\gamma_1 l_1}\left(1-\frac{\hat\delta_2+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}\right) =$$

$$= \frac{\hat B' e^{-\hat\gamma_1 l_1}}{\hat Z_1(1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2})}\Big(1-\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2} -$$

$$-\hat\delta_2 + \hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}\Big) \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Aby wyznaczyć napięcie $\hat V_3$ wyznaczymy naprzód wartość stałej $\hat B''$ z równania (39), biorąc pod uwagę oznaczenie (43):

$$\hat B'' = \frac{\hat V_2}{1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}$$

a następnie wstawimy powyższą wartość $\hat B''$ do wzoru (41), uwzględniając równocześnie wartość napięcia $\hat V_2$ ze wzoru (48) oraz oznaczeczenie (43):

$$\hat V_3 = \frac{\hat B' e^{-\hat\gamma_1 l_1}(1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}+\hat\delta_2+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2})\, e^{-\hat\gamma_2 l_2}(1+\hat\delta_1)}{(1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2})(1+\hat\delta_1 e^{-2\hat\gamma_2 l_2})} = \frac{\hat B' e^{-(\hat\gamma_1 l_1+\hat\gamma_2 l_2)}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}(1+\hat\delta_1)(1+\hat\delta_2) =$$

$$= \frac{\hat B' e^{-(\hat\gamma_1 l_1+\hat\gamma_2 l_2)}}{1+\hat\delta_1\hat\delta_2 e^{-2\hat\gamma_2 l_2}}(1+\hat\delta_1+\hat\delta_2+\hat\delta_1\hat\delta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Aby wyznaczyć natężenie prądu $\hat{I}_3$ wyznaczymy naprzód wartość $\frac{\hat{B}''}{\hat{Z}_2}$ z równania (40), biorąc pod uwagę oznaczenie (43):

$$\frac{\hat{B}''}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{I}_2}{1 - \hat{\delta}_1 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}}$$

a następnie wstawimy powyższą wartość $\frac{\hat{B}''}{\hat{Z}_2}$ do wzoru (42), uwzględniając równocześnie wartość natężenia prądu $\hat{I}_2$ ze wzoru (49) oraz oznaczenie (43):

$$\hat{I}_3 = \frac{\hat{B}' e^{-\hat{\gamma}_1 l_1}(1 - \hat{\delta}_1 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2} - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}) e^{-\hat{\gamma}_2 l_2}(1 - \hat{\delta}_1)}{\hat{Z}_1 (1 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2})(1 - \hat{\delta}_1 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2})} =$$

$$= \frac{\hat{B}' e^{-(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)}}{\hat{Z}_1 (1 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2})}(1 - \hat{\delta}_1)(1 - \hat{\delta}_2) = \frac{\hat{B}' e^{-(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)}}{\hat{Z}_1 (1 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2})}(1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2) \quad . \quad . \quad (51)$$

Po wprowadzeniu do równań (46), (47), (48), (49), (50) i (51) oznaczeń:

$$\frac{\hat{B}'}{1 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}} = \hat{V}_0$$

$$\frac{\hat{B}'}{\hat{Z}_1 (1 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2})} = \frac{\hat{V}_0}{\hat{Z}_1} = \hat{I}_0$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_0 (1 + \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)} + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_1 l_1} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}) \quad . \quad . \quad (52)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 (1 - \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)} - \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_1 l_1} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}) \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\hat{V}_2 = \hat{V}_0 e^{-\hat{\gamma}_1 l_1} (1 + \hat{\delta}_1 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2} + \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}) \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_0 e^{-\hat{\gamma}_1 l_1} (1 - \hat{\delta}_1 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2} - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma}_2 l_2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

$$\hat{V}_3 = \hat{V}_0 e^{-(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)} (1 + \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2) \quad (56)$$

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_0 e^{-(\hat{\gamma}_1 l_1 + \hat{\gamma}_2 l_2)} (1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2) \quad (57)$$

Wzory (52), (53), (54), (55), (56) i (57) określają napięcia i natężenia prądów w obwodzie niesymetrycznym, przedstawionym na rys. 2, w jego początku, w miejscu połączenia obwodów I i II oraz w jego końcu.

Przystępując do rozpatrzenia obwodu spupinizowanego załóżmy, że na rysunku 2 obwód I jest właściwym obwodem telefonicznym, zaś obwód II jest cewką pupinowską, jak uwidoczniono na rys. 3.

Oznaczmy w obwodzie telefonicznym przez:

l jego długość,

$\hat{\gamma}$ tłumienie zespolone,

$\hat{Z}$ opór charakterystyczny,

R, L, A i C stałe elektryczne, odniesione do jednostki długości obwodu telefonicznego,

zaś w cewce pupinowskiej oznaczmy przez:

l_c jej długość,

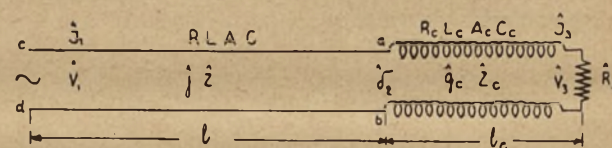
$\hat{\gamma}_c$ tłumienie zespolone,

$\hat{Z}_c$ opór charakterystyczny,

$\hat{g}_c$ iloczyn $\hat{\gamma}_c\ l_c$,

R_c, L_c, A_c i C_c stałe elektryczne cewki, odniesione do jej całkowitej długości l_c.

Jeżeli na rys. 3 obwód niesymetryczny jest zamknięty na końcu oporem zespolonym $\hat{R}_3$ równym oporowi charakterystycznemu obwodu



RYS. 3.

niesymetrycznego, mierzonemu pomiędzy punktami c i d, to oznaczając przez $\hat{\gamma}_p$ tłumienie zespolone obwodu niesymetrycznego i zaniedbując długość l_c cewki pupinowskiej jako bardzo małą w porównaniu z długością l obwodu telefonicznego, określamy tłumienie zespolone γ_p następującymi równaniami:

$$e^{\hat{\gamma}_p (l + l_c)} \cong e^{\hat{\gamma}_p l} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_3} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_3}$$

gdzie znak p oznacza, iż chodzi o tłumienie zespolone obwodu telefonicznego wraz z cewką pupinowską, zaś wartości $\hat{V}_1$, $\hat{I}_1$, $\hat{V}_3$ i $\hat{I}_3$ wyrażają się wzorami (52), (53), (56) i (57). Wzory te dla obwodu spupinizowanego przyjmą następującą postać:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_0 (1 + \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c})$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 (1 - \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} - \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c})$$

$$\hat{V}_3 = \hat{V}_0 e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} (1 + \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2)$$

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_0 e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} (1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2)$$

A zatem:

oraz:

$$e^{\hat{\gamma}_p l} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_3} = \frac{1 + \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c}}{e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 + \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

$$e^{\hat{\gamma}_p l} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_3} = \frac{1 - \hat{\delta}_1 e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} - \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l} + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c}}{e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

We wzorach (58) i (59) występują wielkości $\hat{\delta}_1$ i $\hat{\delta}_2$, z których pierwsza jest spółczynnikiem odbicia energii od końca obwodu niesymetrycznego, druga zaś jest spółczynnikiem odbicia energii w miejscu połączenia cewki pupinowskiej z obwodem telefonicznym (rys. 3). Aby wyrazić tłumienie zespolone $\hat{\gamma}_p$ w zależności od jednego spółczynnika odbicia $\hat{\delta}_2$, wyznaczymy $\hat{\delta}_1$ z równania (58):

$$\hat{\delta}_1 = \frac{e^{\hat{\gamma}_p l} e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 + \hat{\delta}_2) - 1 - \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l}}{e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)} + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c} - e^{\hat{\gamma}_p l} e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 + \hat{\delta}_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$

jak również z równania (59):

$$\hat{\delta}_1 \quad \frac{e^{\hat{\gamma}_p l} e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 - \hat{\delta}_2) - 1 + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{\gamma} l}}{e^{\hat{\gamma}_p l} e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}(1 - \hat{\delta}_2) + \hat{\delta}_2 e^{-2\hat{g}_c} - e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}} \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

Jeżeli porównamy ze sobą prawe strony równań (60) i (61), a następnie otrzymane po uproszczeniu równanie podzielimy przez $e^{-2(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}$, to po odpowiednim uporządkowaniu wyrazów otrzymamy:

$$\frac{e^{2\hat{\gamma}_p l} + 1}{e^{\hat{\gamma}_p l}} = \frac{1}{\hat{\delta}_2^2 - 1}\left\{\hat{\delta}_2^2 \left[e^{\hat{\gamma} l - \hat{g}_c} + e^{-(\hat{\gamma} l - \hat{g}_c)}\right] - \left[e^{\hat{\gamma} l + \hat{g}_c} + e^{-(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)}\right]\right\}$$

lub po wprowadzeniu funkcyj hiperbolicznych:

$$\boxed{Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = \frac{1}{\hat{\delta}_2^2 - 1}\left[\hat{\delta}_2^2\, Cs\,h(\hat{\gamma} l - \hat{g}_c) - Cs\,h(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)\right]} \quad \ldots\ldots (62)$$

Wzór (62) wyraża właśnie zależność tłumienia zespolonego $\hat{\gamma}_p$ od spółczynnika odbicia $\hat{\delta}_2$ w miejscu połączenia cewki pupinowskiej z obwodem telefonicznym. Wartość tego spółczynnika wynosi:

$$\hat{\delta}_2 = \frac{\hat{Z}_c - \hat{Z}}{\hat{Z}_c + \hat{Z}} \quad \ldots\ldots (63)$$

Zgodnie z wzorami (20) i (24) wartości $\hat{Z}$, $\hat{Z}_c$, $\hat{\gamma}$ i $\hat{g}_c$ wyrażają się w następujący sposób:

dla obwodu telefonicznego:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega c}} \quad \ldots (64)$$

$$\hat{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} \quad \ldots (65)$$

dla cewki pupinowskiej:

$$\hat{Z}_c = \sqrt{\frac{R_c + j\omega L_c}{A_c + j\omega C_c}} \quad \ldots (66)$$

$$\hat{g}_c = \sqrt{(R_c + j\omega L_c)(A_c + j\omega C_c)} \quad . (67)$$

W celu wyprowadzenia przybliżonych wzorów, stosowanych w praktyce i umożliwiających obliczanie z dostateczną dokładnością spółczynnika tłumienia β_p i spółczynnika długości fali α_p obwodu spupinizowanego, doprowadzimy równanie (62) do innej postaci, rozwijając wyrazy $Cs\,h\,(\hat{\gamma} l - \hat{g}_c)$ i $Cs\,h\,(\hat{\gamma} l + \hat{g}_c)$. Po odpowiednim uporządkowaniu wyrazów otrzymamy:

$$Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = Cs\,h\,\hat{\gamma} l \,.\, Cs\,h\,\hat{g}_c - \frac{\hat{\delta}_2^2 + 1}{\hat{\delta}_2^2 - 1} Sn\,h\,\hat{\gamma} l \,.\, Sn\,h\,\hat{g}_c$$

zaś po wprowadzeniu wartości $\hat{\delta}_2$ ze wzoru (63):

$$\boxed{Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = Cs\,h\,\hat{\gamma} l \,.\, Cs\,h\,\hat{g}_c + \left(\frac{\hat{Z}_c}{2\hat{Z}} + \frac{\hat{Z}}{2\hat{Z}_c}\right) Sn\,h\,\hat{\gamma} l \,.\, Sn\,h\,\hat{g}_c} \quad \ldots\ldots (68)$$

Ponieważ długość cewki pupinowskiej jest bardzo mała, to $\hat{g}_c$ jest również bardzo małe, wskutek czego w równaniu (68) z dostateczną dokładnością można przyjąć:

$$Cs\,h\,\hat{g}_c \cong 1 \qquad Sn\,h\,\hat{g}_c \cong \hat{g}_c$$

Równanie (68) przyjmie zatem następującą postać:

$$Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = Cs\,h\,\hat{\gamma} l + \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{g}_c \hat{Z}_c}{\hat{Z}} + \frac{\hat{g}_c}{\hat{Z}_c}\hat{Z}\right) Sn\,h\,\hat{\gamma} l$$

przyczem z równań (66) i (67) wynika:

$$\hat{g}_c \hat{Z}_c = R_c + j\omega L \qquad \frac{\hat{g}_c}{\hat{Z}_c} = A_c + j\omega C_c$$

Jeżeli zaniedbać upływność A_c i pojemność C_c pomiędzy uzwojeniami cewki pupinowskiej t. j. jeżeli przyjąć:

$$A_c \cong 0 \qquad C_c \cong 0 \qquad \frac{\hat{g}_c}{\hat{Z}_c} \cong 0$$

to wówczas:

$$Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = Cs\,h\,\hat{\gamma} l + (R_c + j\omega L_c)\frac{Sn\,h\,\hat{\gamma} l}{2\hat{Z}} =$$

$$= 1 + 2\,Sn\,h^2\frac{\hat{\gamma} l}{2} + (R_c + j\omega L_c)\frac{Sn\,h\,\hat{\gamma} l}{2\hat{Z}} =$$

$$= 1 + \frac{Sn\,h\,\hat{\gamma} l}{2\hat{Z}}\left(R_c + j\omega L_c + 2\hat{Z}\,\mathrm{tg}\,h\frac{\hat{\gamma} l}{2}\right) \qquad (69)$$

Rozwijając $Sn\ h\hat{\gamma} l$ oraz $tg\,h\,\frac{\hat{\gamma} l}{2}$ w szereg według znanych wzorów:

$$Sn\,h\,x = x + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \ldots$$

$$\mathrm{tg}\,h\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} - \ldots$$

i uwzględniając tylko pierwsze dwa wyrazy tych szeregów, otrzymamy:

$$\frac{Sn\,h\,\hat{\gamma} l}{\hat{Z}} \cong \frac{\hat{\gamma}}{\hat{Z}}\,l\left(1 + \frac{\hat{\gamma}^2 l^2}{6}\right)$$

$$\hat{Z}\,\mathrm{tg}\,h\frac{\hat{\gamma} l}{2} \cong \hat{\gamma}\hat{Z}\,\frac{l}{2}\left(1 - \frac{\hat{\gamma}^2 l^2}{12}\right)$$

Lecz ze wzorów (64) i (65) wynika:

$$\hat{\gamma}\hat{Z} = R + j\omega L \qquad \frac{\hat{\gamma}}{\hat{Z}} = A + j\omega C$$

natomiast wyraz $\hat{\gamma}^2$ po zaniedbaniu we wzorze (65) upływności A oraz oporu indukcyjnego $j\omega L$, przypadających na jednostkę długości obwodu telefonicznego, przyjmie postać:

$$\hat{\gamma}^2 = j\omega R C$$

zatem:

$$\frac{Sn\,h\,\hat{\gamma} l}{\hat{Z}} = (A + j\omega C)\,l\left(1 + j\omega R C\frac{l^2}{6}\right) =$$

$$= l\left(A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R + j\omega C\right) \quad . \quad . \quad (70)$$

$$\hat{Z}\,\mathrm{tg}\,h\frac{\hat{\gamma} l}{2} = (R + j\omega L)\frac{l}{2}\left(1 - j\omega R C\frac{l^2}{12}\right) \cong$$

$$\cong \frac{l}{2}(R + j\omega L) \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Po uwzględnieniu zależności (70) i (71) we wzorze (69), otrzymamy:

$$Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = 1 + \frac{l^2}{2}\left(A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R + \right.$$

$$\left. + j\omega C\right)\left[R + \frac{R_c}{l} + j\omega\left(L + \frac{L_c}{l}\right)\right]$$

a po rozłożeniu $Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l$ na składowe rzeczywistą i urojoną według wzoru:

$$Cs\,h\,\hat{\gamma}_p l = Cs\,h\,(\beta_p + j\,\alpha_p)\,l = Cs\,h\,\beta_p l\,.\,Cs\,\alpha_p l +$$

$$+ j\,Sn\,h\,\beta_p l\,.\,Sn\,\alpha_p l = P + j\,Q \quad . \quad . \quad (72)$$

będziemy mieli:

$$P = 1 + \frac{l^2}{2}\left(A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R\right)\left(R + \frac{R_c}{l}\right) -$$

$$- \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \frac{L_c}{l}\right) = 1 - \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \right.$$

$$\left. + \frac{L_c}{l}\right)\left[1 - \frac{A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R}{\omega C}\cdot\frac{R + \frac{R_c}{l}}{\omega\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}\right]$$

$$Q = \frac{l^2}{2}\left(A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R\right)\omega\left(L + \frac{L_c}{l}\right) +$$

$$+ \omega C\frac{l^2}{2}\left(R + \frac{R_c}{l}\right) = \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \right.$$

$$\left. + \frac{L_c}{l}\right)\left[\frac{A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R}{\omega C} + \frac{R + \frac{R_c}{l}}{\omega\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}\right]$$

lub wprowadzając oznaczenia:

$$\frac{A - \frac{l^2}{6}\,\omega^2 C^2 R}{\omega C} = \mathrm{tg}\,\varepsilon_1 \quad . \quad (73)$$

$$\frac{R + \frac{R_c}{l}}{\omega\left(L + \frac{L_c}{l}\right)} = \mathrm{tg}\,\varepsilon_2 \quad . \quad . \quad (74)$$

otrzymamy ostatecznie:

$$P = 1 - \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)(1 - \mathrm{tg}\,\varepsilon_1\,.\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_2) =$$

$$= 1 - \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)\frac{Cs\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{Cs\,\varepsilon_1\,.\,Cs\,\varepsilon_2} \qquad (75)$$

$$Q = \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)(\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 + \mathrm{tg}\,\varepsilon_2) =$$

$$= \frac{l^2}{2}\,\omega^2 C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)\frac{Sn\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{Cs\,\varepsilon_1\,.\,Cs\,\varepsilon_2} \quad . \quad (76)$$

Z porównania składowych rzeczywistych i urojonych, stojących po obydwóch stronach równania (72), wyniknie:

$$Csh\,\beta_p l \,.\, Cs\,\alpha_p l = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

$$Snh\,\beta_p l \,.\, Sn\,\alpha_p l = Q \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

gdzie P i Q wyrażają się wzorami (75) i (76).

Równania (77) i (78) tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi β_p i α_p. W celu rozwiązania tego układu określimy naprzód z równania (78) $Snh\,\beta_p l$:

$$Snh\,\beta_p l = \frac{Q}{Sn\,\alpha_p l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

oraz równanie (77) przedstawimy w postaci:

$$Csh^2\,\beta_p l \,.\, Cs^2\,\alpha_p l =$$

$$= (1 + Snh^2\,\beta_p l)\,(1 - Sn^2\,\alpha_p l) = P^2 \quad . \quad (80)$$

Jeżeli podstawimy w równanie (80) wartość $Snh\,\beta_p l$ z równania (79), to ze względu na $Sn\,\alpha_p l$ otrzymamy następujące równanie bikwadratowe:

$$Sn^4\,\alpha_p l - (1 - P^2 - Q^2)\,Sn^2\,\alpha_p l - Q^2 = 0$$

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$1 - P^2 - Q^2 = Sn^2\,\alpha_0 l \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

równanie to przyjmie postać:

$$Sn^4\,\alpha_p l - Sn^2\,\alpha_0 l \,.\, Sn^2\,\alpha_p l - Q^2 = 0$$

Rozwiązanie tego równania będzie następujące:

$$Sn\,\alpha_p l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(Sn^2\,\alpha_0 l \pm \sqrt{Sn^4\,\alpha_0 l + 4\,Q^2}\right)} =$$

$$= \pm\,Sn\,\alpha_0 l\,\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2\,Q}{Sn^2\,\alpha_0 l}\right)^2}\,\right]} =$$

$$= \frac{Sn\,\alpha_0 l}{\pm\sqrt{\dfrac{2}{1 \pm \sqrt{1 + \left(\dfrac{2\,Q}{Sn^2\,\alpha_0 l}\right)^2}}}} \quad . \quad . \quad (82)$$

Biorąc pod uwagę tylko znak plus i wprowadzając oznaczenie:

$$\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{2\,Q}{Sn^2\,\alpha_0 l}\right)^2}}} = k \qquad (83)$$

otrzymamy:

$$Sn\,\alpha_p l = \frac{Sn\,\alpha_0 l}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Wartość k we wzorze (83) nazywa się korekcją Mayer'a.

Jeżeli wprowadzimy do wzoru (79) wartość $Sn\,\alpha_p l$ ze wzoru (84), to będziemy mieli:

$$Snh\,\beta_p l = \frac{k\,Q}{Sn\,\alpha_0 l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Wzory (84) i (85) stanowią właśnie rozwiązania układu równań (77) i (78).

Obliczanie spółczynnika tłumienia β_p oraz spółczynnika długości fali α_p obwodu spupinizowanego w wypadku ogólnym wykonywamy zatem w ten sposób, że dla danych wartości:

stałych R, L, A i C obwodu niespupinizowanego, odniesionych do jego jednostki długości,

stałych R_c i L_c cewki pupinowskiej,

odległości l pomiędzy cewkami pupinowskiemi,

pulsacji ω,

obliczamy ze wzorów (75) i (76) wartości P i Q, posiłkując się wzorami (73) i (74) dla obliczania ε_1 i ε_2, a następnie ze wzoru (81) wyznaczamy $Sn\,\alpha_0 l$, a następnie ze wzoru (83) — korekcję Mayer'a. W ten sposób otrzymujemy wszystkie wartości, potrzebne do obliczenia $Sn\,\alpha_p l$ i $Snh\,\beta_p l$ ze wzorów (84) i (85).

Aby otrzymać wzory nadające się do użytku praktycznego, podstawmy w równanie (81) wartości P i Q z równań (75) i (76). Otrzymamy wówczas:

$$Sn^2\,\alpha_0 l = \omega^2 l^2 \frac{C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}{Cs\,\varepsilon_1 \,.\, Cs\,\varepsilon_2}\left[Cs\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{l^2}{4}\,\frac{\omega^2\,C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}{Cs\,\varepsilon_1 \,.\, Cs\,\varepsilon_2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Z równania (85) wynika, że spółczynnik tłumienia β_p osiąga wówczas wartość nieskończenie wielką, gdy jest spełniony warunek:

$$Sn\,\alpha_0 l = 0$$

Z równania (86) wynika, że warunek ten jest spełniony przy dwóch wartościach pulsacji ω, a mianowicie przy:

$$\omega = 0$$

oraz przy:

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{Cs\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,Cs\,\varepsilon_1 \,.\, Cs\,\varepsilon_2}{C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}} \quad . \quad (87)$$

Pulsacja ω_0 nazywa się pulsacją graniczną, zaś odpowiadająca jej częstotliwość — graniczną częstotliwością. Te wszystkie częstotliwości, które znajdują się poniżej granicznej, obwód spupinizowany przepuszcza praktycznie bez żadnego tłumienia, natomiast dla tych wszystkich częstotliwości, które znajdują się powyżej granicznej, obwód ten jest praktycznie nieprzenikliwy.

Z pierwszej części wzoru (82) t. j.:

$$Sn\,\alpha_p l = \sqrt{\frac{1}{2}\left(Sn^2\,\alpha_0 l + \sqrt{Sn^4\,\alpha_0 l + 4\,Q^2}\right)}$$

wynika, że przy pulsacji granicznej ω_0, dla której wartość $Sn\,\alpha_0\,l$ równa się zeru, wartość $Sn\,\alpha_p\,l$ wynosi:

$$Sn\,\alpha_p\,l = \sqrt{Q}$$

Ze wzoru (79) wyniknie wówczas:

$$Sn\,h\,\beta_p\,l = Sn\,\alpha_p\,l = \sqrt{Q} \quad . \; . \; . \quad (88)$$

Ponieważ wartości ε_1 i ε_2, wyrażające się wzorami (73) i (74), są małe, to we wzorze (87) z dostateczną dokładnością można przyjąć:

$$Cs\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cong Cs\,\varepsilon_1 \cong Cs\,\varepsilon_2 \cong 1 \quad . \; . \quad (89)$$

Wzór ten przyjmie zatem następującą postać:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2}{l\sqrt{C\left(L + \frac{L_c}{l}\right)}}} \quad . \; . \; . \; . \quad (90)$$

Ze wzoru (90) otrzymujemy:

$$\frac{l^2}{2}\,C\left(L + \frac{L_c}{l}\right) = \frac{2}{\omega_0^2} \quad . \; . \; . \quad (91)$$

Jeżeli uwzględnimy zależność (91) we wzorze (75) i weźmiemy pod uwagę równanie (89), to wprowadzając oznaczenie:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta$$

będziemy mieli:

$$P = 1 - 2\eta^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (92)$$

We wzorze (76) na składową urojoną Q jednym z czynników jest $Sn\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, który posiada małą wartość, z tego względu wartość Q jest również mała i kwadrat jej we wzorze (81) można pominąć. Ze wzoru (81) otrzymamy zatem:

$$Sn\,\alpha_0\,l = \sqrt{1 - P^2}$$

lub po uwzględnieniu wartości P ze wzoru (92):

$$Sn\,\alpha_0\,l = 2\eta\sqrt{1 - \eta^2} \quad . \; . \; . \quad (93)$$

Podstawiając do wzoru (84) wartość $Sn\,\alpha_0\,l$ ze wzoru (93), otrzymamy ostatecznie następujący wzór przybliżony dla spółczynnika długości fali α_p obwodu spupinizowanego:

$$\boxed{Sn\,\alpha_p\,l = \frac{2\eta\sqrt{1 - \eta^2}}{k}} \quad . \; . \; . \quad (94)$$

Obecnie przystąpimy do określenia spółczynnika tłumienia β_p. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L + \frac{L_c}{l}}{C}} \quad . \; . \; . \quad (95)$$

Z pomnożenia równań (90) i (95) przez siebie stronami wypadnie:

$$Z_0\,\omega_0 = \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{C} \quad . \; . \; . \; . \quad (96)$$

zaś z ich podzielenia:

$$\frac{Z_0}{\omega_0} = \frac{l}{2}\left(L + \frac{L_c}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (97)$$

Z równań (96) i (97) otrzymujemy:

$$C = \frac{2}{l\,Z_0\,\omega_0} \quad . \; . \; . \; . \quad (98)$$

$$L + \frac{L_c}{l} = \frac{2Z_0}{\omega_0\,l} \quad . \; . \; . \quad (99)$$

Po podstawieniu wartości C ze wzoru (98) do wzoru (73) oraz wartości $L + \frac{L_c}{l}$ ze wzoru (99) do wzoru (74) będziemy mieli:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{A}{\omega C} - \frac{l^2}{6}\,\omega C R =$$

$$= \frac{1}{2}\,A Z_0 \frac{l}{\eta} - \frac{\eta R}{Z_0} \cdot \frac{l}{3} \quad . \; . \quad (100)$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R_c}{l}\right)\frac{l}{\eta Z_0} \quad . \quad (101)$$

Jeżeli podstawimy wartości C, $L + \frac{L_c}{l}$, $\operatorname{tg}\varepsilon_1$ i $\operatorname{tg}\varepsilon_2$ ze wzorów (98), (99), (100) i (101) do wzoru (76), to otrzymamy następującą wartość składowej urojonej Q:

$$Q = 2\eta l \left[\frac{\frac{R_c}{l} + R\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right)}{2Z_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{2} Z_0 \right] = 2\eta l \beta_0 \quad . \; . \; . \quad (102)$$

gdzie β_0 przy uwzględnieniu wzoru (95) wyrazi się w następujący sposób:

$$\boxed{\beta_0 = \frac{\frac{R_c}{l} + R\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right)}{2}\sqrt{\frac{C}{L + \frac{L_c}{l}}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L + \frac{L_c}{l}}{C}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (103)$$

zaś czynnik $1 - \frac{2}{3}\eta^2$ nazywa się korekcją Plejel'a.

Na podstawie wzorów (93) i (102) wzór (83) na korekcję Mayer'a przyjmie następującą postać:

$$k = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+\left[\frac{\beta_0 l}{\eta(1-\eta^2)}\right]^2}}} \quad (104)$$

zaś wzór (85) dla spółczynnika tłumienia β_p:

$$Sn\,h\,\beta_p l = \frac{\beta_0 l}{\sqrt{1-\eta^2}} . k \quad . \quad . \quad (105)$$

Obliczanie spółczynnika tłumienia β_p oraz spółczynnika długości fali α_p obwodu spupinizowanego praktycznie wykonywamy zatem w ten sposób, że dla danych wartości:

stałych R, L, A i C obwodu niespupinizowanego, odniesionych do jego jednostki długości,

stałych R_c i L_c cewki pupinowskiej,

odległości l pomiędzy cewkami pupinowskiemi,

stosunku

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0},$$

obliczamy ze wzorów (103) i (104) wartości β_0 i k, a następnie wartości $Sn\,\alpha_p l$ i $Sn\,h\,\beta_p l$ ze wzorów (94) i (105). Pulsację graniczną ω_0 obliczamy ze wzoru (90).

W wypadku szczególnym gdy:

$$\eta = 1$$

czyli:

$$\omega = \omega_0$$

ze wzoru (102) otrzymujemy:

$$Q = 2\beta_0 l$$

Ze wzoru (88) wyniknie wówczas

$$Sn\,h\,\beta_p l = Sn\,\alpha_p l = \sqrt{2\beta_0 l} \quad . \quad . \quad (106)$$

W przypadku obwodu spupinizowanego o małej stratności wartości stałych A, R i R_c są bardzo małe. A zatem wartości ε_1, ε_2 i Q, wyrażające się wzorami (73), (74) i (76) będą również bardzo małe. We wzorze (83) będzie można zatem wyraz zawierający Q^2 opuścić wobec jedności. Wartość korekcji Mayer'a wypadnie wówczas:

$$k \cong 1$$

Wzory (94) i (105) przyjmą wtedy następującą postać:

$$Sn\,\alpha_p l = 2\eta\sqrt{1-\eta^2} \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

$$Sn\,h\,\beta_p l = \frac{\beta_0 l}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Z porównania wzorów (93) i (107) wypadnie:

$$\alpha_p = \alpha_0$$

t. j. spółczynnik długości fali wyraża się wartością α_0.

W obszarze małych częstotliwości, w których stosunek η posiada małe wartości, można we wzorze (108) pominąć η^2 wobec jedności:. Otrzymamy wtedy:

$$Sn\,h\,\beta_p l \cong \beta_p l = \beta_0 l$$

czyli:

$$\beta_p = \beta_0$$

A zatem spółczynnik tłumienia β_p obwodu spupinizowanego o małej stratności można w obszarze małych częstotliwości obliczać ze wzoru (103), pomijając w korekcji Pleijela wyraz $\frac{2}{3}\eta^2$ wobec jedności t. j.

$$\beta_p = \beta_0 = \frac{R+\frac{R_c}{l}}{2}\sqrt{\frac{C}{L+\frac{L_c}{l}}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L+\frac{L_c}{l}}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

We wzorze (109) pierwszy wyraz:

$$\frac{R+\frac{R_c}{l}}{2}\sqrt{\frac{C}{L+\frac{L_c}{l}}}$$

nazywa się tłumieniem oporowym, drugi zaś wyraz:

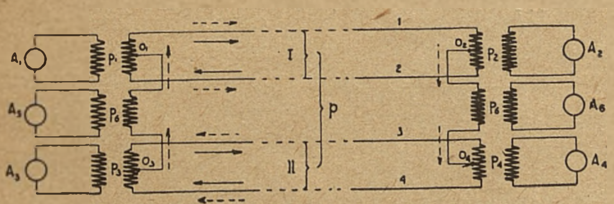
$$\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L+\frac{L_c}{l}}{C}}$$

nazywa się tłumieniem upływu.

W kablach telefonicznych dalekosiężnych, które są wykonywane według systemu czwórkowego Dieselhorst-Martina, w celu lepszego wykorzystania kabla wykorzystuje się również obwody pochodne. Zasadę tego systemu uwidocznia rys. 4, w którym I i II są obwodami macierzystemi, oraz p jest obwodem pochodnym.

W celu utworzenia obwodu pochodnego włącza się do obwodów macierzystych na ich końcach symetryczne przenośniki p_1, p_2, p_3 i p_4, a następnie ze środków o_1, o_2, o_3 i o_4 uzwojeń tych przenośników wyprowadza się odgałęzienia do przenośników p_5 i p_6, które w ten sposób zostają włączone w obwód pochodny. Na rys. 4 w obwód mcierzysty I są włączone aparaty A_1 i A_2, w obwód macierzysty II—apa-

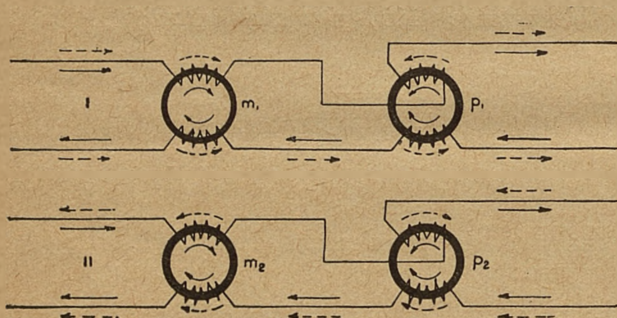
raty A_3 i A_4, oraz w obwód pochodny p— aparaty A_5 i A_6. System ten umożliwia zatem jednoczesne prowadzenie trzech rozmów zapomocą czterech przewodów, powiększając o 50% wykorzystanie kabla. Strzałki zaznaczone na rys. 4



RYS. 4.

liniami pełnymi wskazują chwilowe kierunki prądów w obwodach macierzystych, zaś strzałki zaznaczone liniami przerywanymi wskazują chwilowe kierunki prądu w obwodzie pochodnym. Żyły 1 i 2 w obwodzie pochodnym są połączone równolegle i prowadzą prąd w jednym kierunku, natomiast żyły 3 i 4, również połączone równolegle w obwodzie pochodnym, prowadzą prąd w drugim kierunku.

Pupinizacja pojedynczej czwórki kablowej może być wykonana bądź systemem czterocewkowym Ebelinga, bądź systemem trzycewkowym Campbella. W systemie czterocewkowym każdy z dwóch obwodów macierzystych I i II otrzymuje po jednej cewce m_1 i m_2 (rys. 5)



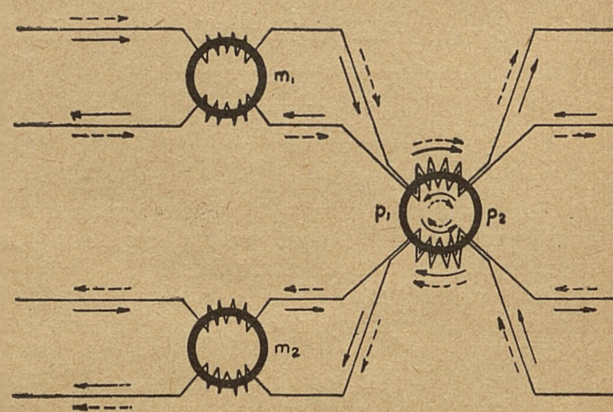
RYS. 5.

dla pupinizacji tych obwodów i prócz tego po jednej cewce p_1 i p_2 dla pupinizacji obwodu pochodnego. Prądy płynące w obwodach macierzystych nie wytwarzają strumieni magnetycznych w rdzeniach cewek p_1 i p_2 wskutek przeciwsobnego połączenia uzwojeń tych cewek, natomiast wytwarzają strumienie magnetyczne w rdzeniach m_1 i m_2 wskutek zasobnego połączenia ich uzwojeń. Prąd płynący w obwodzie pochodnym nie wytwarza strumieni magnetycznych w rdzeniach cewek m_1 i m_2, natomiast wytwarza je w rdzeniach cewek p_1 i p_2. Kierunki prądów są zaznaczone na rys. 5 podobnież jak na rys. 4.

W systemie trzycewkowym uzwojenia obydwóch cewek p_1 i p_2 są umieszczone na wspólnym rdzeniu, jak uwidoczniono na rys. 6.

W Polsce jest stosowany trzycewkowy system Campbell'a, przyczem trzy cewki, przeznaczone do pupinizacji jednej czwórki kablowej, tworzą zespół pupinowski. Ilość takich zespołów równa się zatem liczbie czwórek kabla. Wszystkie zespoły pupinowskie, przeznaczone dla danego punktu pupinizacyjnego, są umieszczone w jednej skrzyni żeliwnej, która nazywa się skrzynią pupinowską.

W tych cewkach, w których wskutek przeciwsobnego połączenia ich uzwojeń nie wytwarzają się strumienie magnetyczne, niema strat w żelazie t. j. opór stratności równa się zeru.



RYS. 6.

Można zatem przyjąć, że w tych cewkach opór uzwojenia przy prądzie zmiennym równa się jego oporowi przy prądzie stałym. Jeżeli więc oznaczymy przez:

$\tilde{R}_{cm}$ opór uzwojenia cewki dla obwodu macierzystego przy prądzie zmiennym,

$\bar{\bar{R}}_{cm}$ opór uzwojenia cewki dla obwodu macierzystego przy prądzie stałym,

$\tilde{R}_{cp}$ opór uzwojenia cewki dla obwodu pochodnego przy prądzie zmiennym,

$\bar{\bar{R}}_{cp}$ opór uzwojenia cewki dla obwodu pochodnego przy prądzie stałym,

gdzie powyższe wartości oporów odnoszą się do obydwóch połówek uzwojenia, połączonych szeregowo, to z dostatecznym przybliżeniem można przyjąć do rachunku następującą wartość całkowitego oporu cewek w obwodzie macierzystym przy prądzie zmiennym:

$$(R_c)_m = \tilde{R}_{cm} + \bar{\bar{R}}_{cp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

oraz następującą wartość całkowitego oporu cewek w obwodzie pochodnym przy prądzie zmiennym:

$$(R_c)_p = \frac{1}{2}(\bar{\bar{R}}_{cm} + \tilde{R}_{cp}) \quad . \quad . \quad (111)$$

Przykład.

W kablach telefonicznych dalekosiężnych, instalowanych w Polsce, przeciętnie można przyjąć następujące wartości stałych R, L, A i C dla obwodu macierzystego niepupinizowanego, utworzonego z żył o średnicy drutu 1,3 mm:

$R \;= 25{,}4\ \Omega/\text{km}$

$L \;= 0$

$$A_{800} = 0{,}6\ \mu S/km$$
$$C = 0{,}0385\ \mu F/km$$

Upływność A_{800} jest odniesiona do częstotliwości 800 okresów na sekundę, przy której kąt stratności δ_{800} dla izolacji papierowo-powietrznej wynosi:

$$\operatorname{tg} \delta_{800} = 0{,}003$$

Ponieważ jest:

$$\operatorname{tg} \delta_{800} = 0{,}003 = \frac{A_{800}}{\omega C} = \frac{A_{800} \cdot 10^6}{10^6 \cdot 5000 \cdot 0{,}0385}$$

zatem:

$$A_{800} = 0{,}003 \cdot 5000 \cdot 0{,}0385 = 0{,}6\ \mu s/km.$$

Przyjmując, że upływność jest proporcjonalna do częstotliwości, otrzymamy następującą wartość upływności A, odpowiadającą dowolnej pulsacji ω:

$$A = \frac{0{,}6 \cdot \omega}{10^6 \cdot 5000} = 0{,}12 \cdot 10^{-9}\, \omega\, \frac{S}{km}$$

Przy odległości l pomiędzy cewkami pupinowskimi, wynoszącej:

$$l = 1{,}83\ \text{km}$$

oraz w przypadku mocnej pupinizacji, w której indukcyjność cewki dla pupinizacji obwodu macierzystego wynosi:

$$L_c = 177\ \text{mH}$$

otrzymamy ze wzoru (90) następującą wartość pulsscji granicznej:

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{l C L_c}} = \frac{2}{\sqrt{1{,}83 \cdot 0{,}0385 \cdot 177 \cdot 10^{-9}}} = 17909{,}7$$

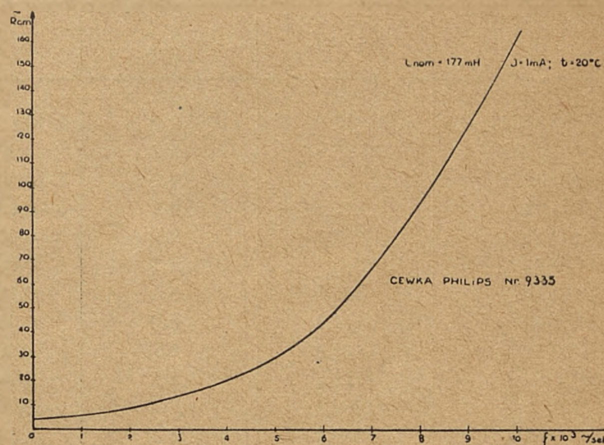
względnie częstotliwości granicznej:

$$f_0 = \frac{17909{,}7}{6{,}28} = 2852$$

Wzór (103) przyjmie dla obwodu macierzystego następującą postać:

$$\beta_0 = \frac{\frac{(R_c)_m}{l} + R\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right)}{2} \sqrt{\frac{l C}{L_c}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L_c}{l C}} \quad \ldots \quad (112)$$

gdzia $(R_c)_m$ oznacza całkowity opór cewek w obwodzie macierzystym, wyrażający się wzorem (110). Na rysunku 7 jest uwidoczniony przebieg krzywej oporu $\tilde{R}_{cm}$ w funkcji częstotliwości dla cewki o indukcyjności 177 mH, służącej do pupinizacji obwodu macierzystego, natomiast na rys. 8 jest uwidoczniony przebieg krzywej oporu $\tilde{R}_{cp}$ w funkcji częstotliwości dla cewki o indukcyjności 63 mH, służącej do pupinizacji obwodu pochodnego. Krzywe te odnoszą się do cewek pupinowskich, wykonywanych przez firmę Philips w Warszawie. Pomiary powyższych krzywych wykonano w Państwowym Instytucie Telekomunikacyjnym przy prądzie 1 mA i temperaturze 20° C.



RYS. 7.

We wzorze (110) wartości oporu $\overline{\overline{R}}_{cp}$ otrzymuje się z krzywej na rys. 8 jako rzędną, odpowiadającą częstotliwości równej zeru, zaś opór $\tilde{R}_{cm}$, odpowiadający różnym częstotliwościom, otrzymuje się z krzywej na rys. 7. Wartość $\tilde{R}_{cp}$ wynosi:

$$\overline{\overline{R}}_{cp} = 1{,}4\ \Omega$$

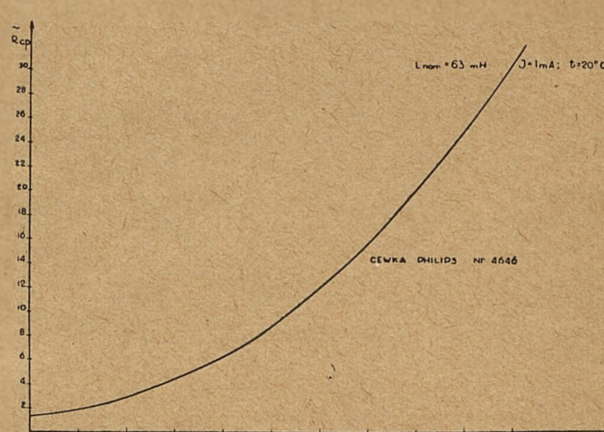
Po uwzględnieniu we wzorze (112) podanych powyżej wartości liczbowych, oraz zależności:

$$\omega = \eta\, \omega_0 = 17909{,}7\, \eta$$

wzór ten przyjmie postać:

$$\beta_0 = 0{,}00017238\ (\tilde{R}_{cm} + 1{,}4) +$$
$$+ 0{,}0080126 \left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right) + 0{,}0017032\, \eta$$

Korekcję Mayer'a k obliczamy ze wzoru (104),



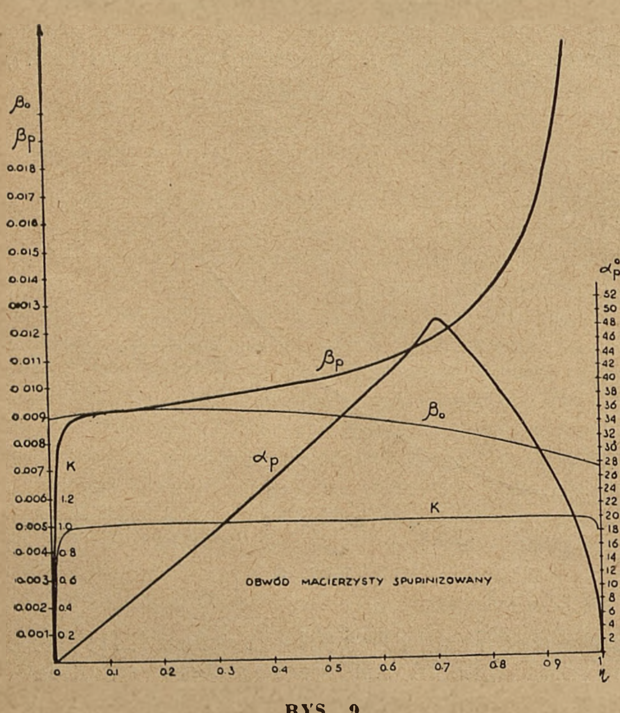
RYS. 8.

natomiast $Sn\, \alpha_p l$ i $Sn\, h\, \beta_p l$ — ze wzoru (94) i (105). Wyniki obliczeń dla macierzystego spupinizowanego obwodu są podane w tablicy Nr. 1, zaś

TABLICA Nr 1.

Obwód macierzysty			$f_0 = 2852$		$L_c = 177\ mH$	
η	$f = \eta f_0$	$\tilde{R}_{cm}$	β_0	k	α_p	β_p
0,00625	17,8	4,0	0,008954	0,72490	—	0,006491
0,0125	35,6	4,0	0,008964	0,86873	0°54,08′	0,007788
0,025	71,3	4,0	0,008983	0,95410	1°38,45′	0,008573
0,05	142,6	4,1	0,009032	0,98689	3°10,43′	0,008925
0,1	285,2	4,2	0,009095	0,99651	6°17,66′	0,009109
0,2	570,4	4,7	0,009191	0,99904	12°37,30′	0,009372
0,3	855,6	5,1	0,009163	0,00053	19° 5,37′	0,009601
0,4	1140,8	6,0	0,009115	0,99969	25°47,06′	0,009942
0,5	1426,0	6,7	0,008926	0,99976	32°49,77′	0,010304
0,6	1711,2	7,5	0,008646	0,99979	40°19,03′	0,010805
0,66	1882,3	8,2	0,008464	0,99978	45°11,27′	—
0,68	1939,4	8,4	0,008373	0,99978	46°55,03′	—
0,7	1996,4	8,6	0,008312	0,99977	49°10,82′	0,011637
0,72	2053,4	9,0	0,008262	0,99976	48°11,14′	—
0,74	2110,5	9.1	0,008157	0,99975	46°16,56′	—
0,76	2167,5	9,5	0,008100	0,99973	44°21,33′	—
0,8	2281,6	10,0	0,007922	0,99968	40°19,77′	0,013199
0,9	2566,8	11,5	0,007443	0,99921	28°16,42′	0,017062
0,95	2709,4	12,3	0,007172	0,99751	19°56,58′	0,022371
0,975	2780,7	12,5	0,006992	0,99144	14°10,07′	—
0,9875	2816,4	12,8	0,006934	0,96995	10°13,76′	—
0,99375	2834,2	12,9	0,006894	0,90767	7°43,88′	—
1,0	2852	13,0	0,006885	0	0	∞

krzywe dla β_0, k, α_p i β_p w funkcji stosunku η uwidocznia rys. 9. Z rysunku tego widać, że korekcja Mayer'a k w obszarze małych częstotliwości szybko wzrasta do wartości równej jedności, powodując szybkie podnoszenie się krzywej spółczynnika tłumiemia β_p (patrz wzór (105)). Krzywa spółczynnika długości fali α_p przechodzi przez maksimum w okolicy $\eta = 0{,}7$, stanowiącej charakterystyczną liczbę dla kabli spupinizowanych.



RYS. 9.

Wartości stałych R, L, A i C dla obwodu pochodnego niepupinizowanego, utworzonego z żył o średnicy drutu 1,3 mm będą następujące:

$$R = 12{,}7\ \Omega/\text{km}$$

$$L = 0$$

$$A_{800} = 1\ \mu\text{S/km}$$

$$C = 0{,}0385 \,.\, 1{,}615 = 0{,}0622\ \mu\text{F/km}$$

Upływność A_{800} jest odniesiona do częstotliwości 800 okresów na sekundę, przy której kąt stratności δ_{800} dla izolacji papierowo-powietrznej wynosi:

$$\text{tg}\,\delta_{800} = 0{,}003$$

Ponieważ jest:

$$\text{tg}\,\delta_{800} = 0{,}003 = \frac{A_{800}}{\omega C} = \frac{A_{800} \,.\, 10^6}{10^6 \,.\, 5000 \,.\, 0{,}0622}$$

zatem:

$$A_{800} = 0{,}003 \,.\, 5000 \,.\, 0{,}0622 \cong 1\ \mu\text{S/km}.$$

Przyjmując, że upływność jest proporcjonalna do częstotliwości, otrzymamy następującą wartość upływności A, odpowiadającą dowolnej pulsacji ω:

$$A = \frac{1 \,.\, \omega}{10^6 \,.\, 5000} = 0{,}2 \,.\, 10^{-9}\, \omega \frac{\text{S}}{\text{km}}$$

TABLICA Nr 2.

Obwód pochodny			$f_0 = 3761$		$L_c = 63\ mH$	
η	$f = \eta f_0$	$\bar{R}_{cp}$	β_0	k	α_p	β_p
0,00625	23,5	1,4	0,009537	0,71011	—	0,006773
0,0125	47,0	1,4	0,009547	0,85769	—	0,008189
0,025	94,0	1,4	0,009567	0,94893	—	0,009081
0,05	188,1	1,4	0,009600	0,98527	—	0,009470
0,1	376,1	1,5	0,009664	0,99606	6°17,84′	0,009674
0,2	752,2	1,7	0,009705	0,99893	12°37,38′	0,009894
0,3	1128,3	2,0	0,009651	0,99948	19° 5,44′	0,010111
0,4	1504,4	2,4	0,009503	0,99967	25°46,78′	0,010365
0,5	1880,5	2,8	0,009239	0,99974	32°48,04′	0,010665
0,6	2256,6	3,3	0,008881	0,99978	40°19,16′	0,011099
0,66	2482,3	3,6	0,008612	0,99985	45°10,24′	—
0,68	2557,5	3,7	0,008513	0,99977	46°55,30′	—
0,7	2632,7	3,8	0,008409	0,99977	49°10,82′	0,011772
0,72	2707,9	4,0	0,008319	0,99976	48°14,96′	—
0,74	2783,1	4,0	0,008188	0,99975	46°16,56′	—
0,76	2858,4	4,2	0,008089	0,99973	44°21,20′	—
0,8	3008,8	4,4	0,007842	0,99969	40°19,70′	0,013066
0,9	3384,9	5,0	0,007159	0,99927	28°16,29′	0,016412
0,95	3573,0	5,4	0,006795	0,99776	19°52,92′	0,021718
0,975	3667,0	5,6	0,006602	0,99234	14° 9,04′	—
0,9875	3714,0	5,7	0,006502	0,97326	10°11,61′	—
0,99375	3737,5	5,8	0,006461	0,91619	7°39,46′	—
1,0	3761,0	5,8	0,006401	0	0	∞

Przy odległości l pomiędzy cewkami pupinowskiemi, wynoszącej:

$$l = 1{,}83 \text{ km}$$

oraz w wypadku mocnej pupinizacji, w której indukcyjność cewki dla pupinizacji obwodu pochodnego wynosi:

$$L_c = 63 \text{ mH}.$$

otrzymamy ze wzoru (90) następującą wartość pulsacji granicznej:

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{l\,C\,L_c}} = \frac{2}{\sqrt{1{,}83\,.\,0{,}0622\,.\,63\,.\,10^{-9}}} = $$
$$= 23618$$

względnie częstotliwości granicznej:

$$f_0 = \frac{23618}{6{,}28} = 3761$$

Wzór (103) przyjmie dla obwodu pochodnego następującą postać:

$$\beta_0 = \frac{\frac{(R_c)_p}{l} + R\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right)}{2}\sqrt{\frac{l\,C}{L_c}} + $$
$$+ \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L_c}{l\,C}} \quad . \; . \; . \; . \; (113)$$

gdzie $(R_c)_p$ oznacza całkowity opór cewek w obwodzie pochodnym, wyrażający się wzorem (111). We wzorze tym wartość oporu $\bar{\bar{R}}_{cm}$ otrzymuje się z krzywej na rys. 7 jako rzędną, odpowiadającą częstotliwości równej zeru, zaś opór $\overset{\infty}{R}_{cp}$, odpowiadający różnym częstotliwościom, otrzymuje się z krzywej na rys. 8. Wartość $\bar{\bar{R}}_{cm}$ wynosi:

$$\bar{\bar{R}}_{cm} = 4\,\Omega\,.$$

Po uwzględnieniu we wzorze (113) podanych powyżej wartości liczbowych, oraz zależności:

$$\omega = \eta\,\omega_0 = 23618\,\eta$$

wzór ten przyjmie postać:

$$\beta_0 = 0{,}000183628\,(\overset{\infty}{R}_{cp} + 4) + $$
$$+ 0{,}00853540\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right) + 0{,}00175708\,\eta$$

Wyniki obliczeń dla pochodnego spupinizowanego obwodu są podane w tablicy Nr 2, zaś krzywe dla β_0, k, α_p i β_p w funkcji stosunku η uwidocznia rys. 10. Z rysunku 9 i 10 widać, że krzywe spółczynnika długości fali α_p dla obwodu macierzystego i pochodnego są prawie jednakowe, i że przechodzą one przez maksimum przy wartośsi $\eta = 0{,}7$, która stanowi charakterystyczną liczbę dla kabli spupinizowanych, liczba ta prawie nie zależy od rodzaju pupinizacji, gdyż przyjmując w równaniu (94):

$$k \cong 1$$

otrzymamy:

$$Sn\,\alpha_p\,l = 2\,\eta\sqrt{1 - \eta^2} \quad . \; . \; . \; (114)$$

W celu otrzymania tej wartości η, przy której współczynnik długości fali α_p przechodzi przez maksimum, należy pierwszą pochodną równania (114) przyrównać do zera. Będzie wówczas:

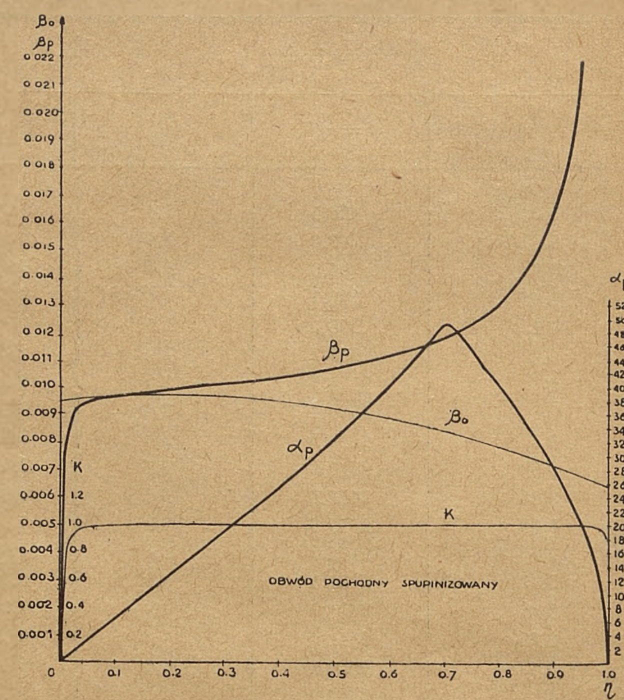
$$-\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}} + \sqrt{1-\eta^2} = 0$$

skąd:

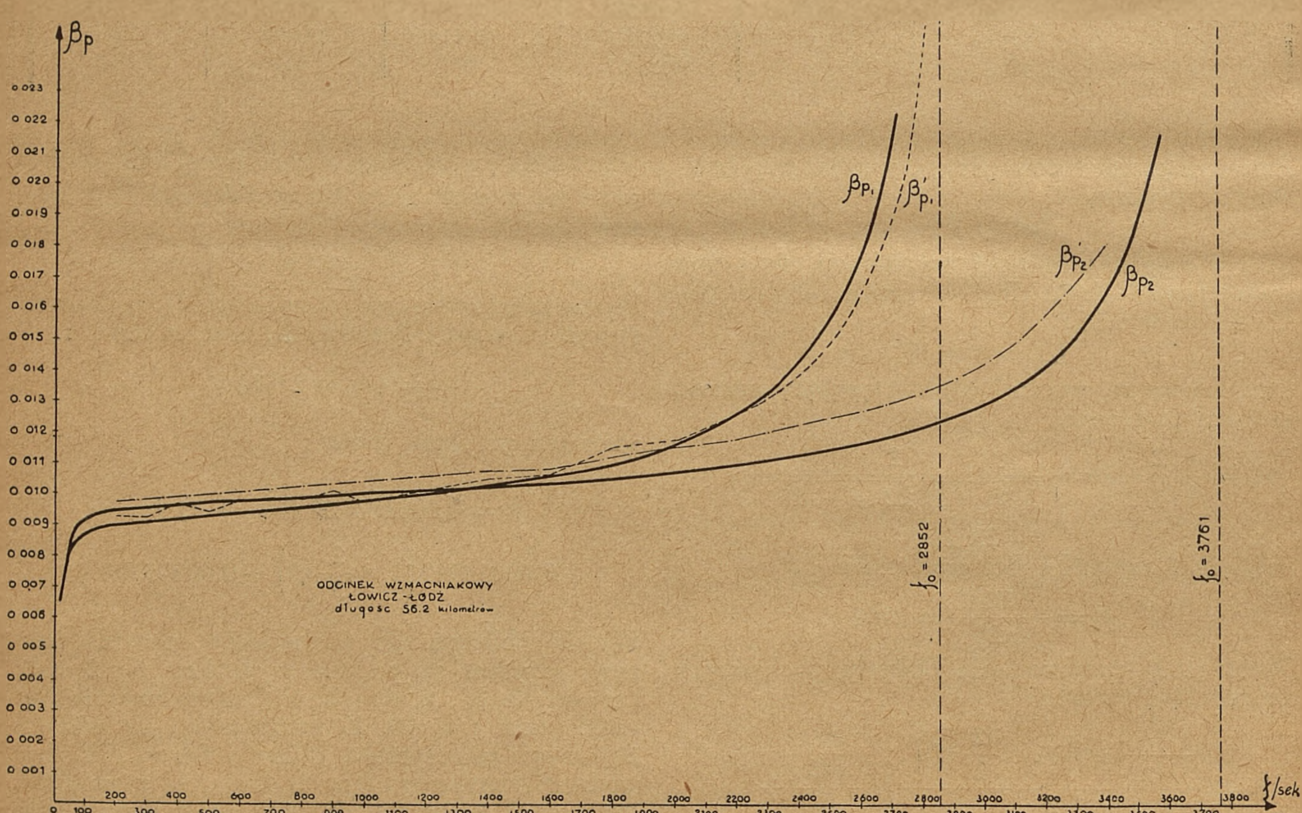
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$$

Przy sposobności zaznaczyć należy, że równoważniki na stacjach wzmacniakowych, umieszczane w rozwidleniach, nastawia się tak, aby równowaga pomiędzy oporem pozornym obwodu spupinizowanego i oporem pozornym równoważnika była zachowana conajmniej aż do częstotliwości, wynoszącej 0,7 częstotliwości granicznej. Zachowanie wspomnianej równowagi przy wyższych częstotliwościach ze względu na zjawisko silnego zniekształcenia fazowego, występującego przy tych częstotliwościach, napotyka na duże trudności.

Na rys. 11 teoretyczne krzywe β_{p1} i β_{p2} wyrażają tłumienie w funkcji częstotliwości. Krzywe te są naniesione przy pomocy tablic



RYS. 10.



RYS. 11.

Nr. Nr. 1 i 2. Krzywe β'_{p1} i β'_{p2} narysowane liniami przerywanemi są otrzymane z pomiaru odcinka wzmacniakowego Łowicz—Łódź o długości 56,2 km. Jak widać odchylenia pomiędzy krzywemi teoretycznemi i otrzymanemi z pomiaru są niewielkie. Przerywane linie pionowe, odpowiadające częstotliwościom granicznym 2852 i 3762, są asymptotami, do których teoretyczne krzywe tłumienia zbliżają się nieograniczenie. (D. c. n.).

Redaktor: **Inż. Henryk Pomirski.** Wydawca: **Stow. Teletechników Polskich.**

Drukarnia Techniczna, Sp. Akc., Warszawa, Czackiego 3/5, tel. 614-67 i 277-98